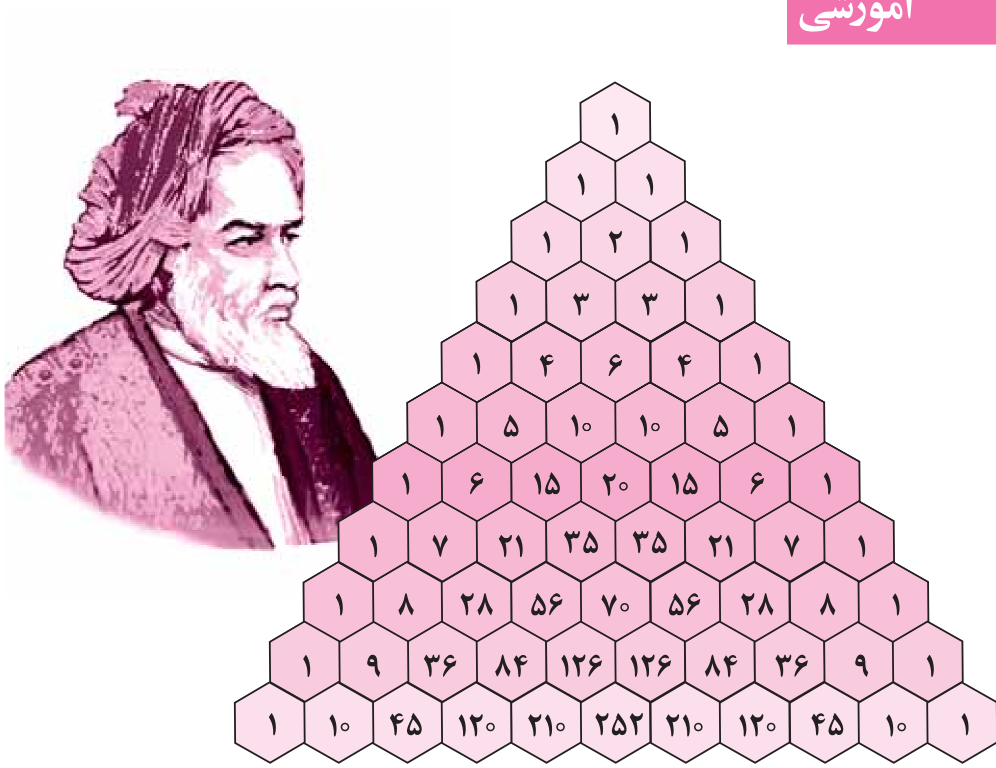


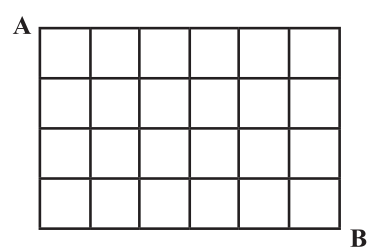
عنایت‌اله راستی‌زاده
دبیر ریاضی
دبیرستان‌های شیراز

مثلث خیام و تعداد کوتاه‌ترین مسیرها

اشاره

مثلث خیام یکی از زیباترین آرایه‌های عددی است که در تاریخ ریاضیات همواره مورد توجه واقع شده است و ابزاری ساده برای گره‌گشایی از بسیاری مسائل پیچیده به‌شمار می‌آید. از سوی دیگر، جایگاه و کاربرد اصلی عناصر این مثلث در مسائل شمارشی است. در این مقاله به شرح روشی ساده برای محاسبهٔ تعداد کوتاه‌ترین مسیرها به کمک این مثلث خواهیم پرداخت.

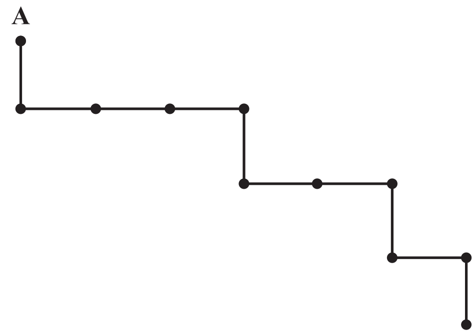
تعریف: شکل ۱ شبکه‌ای از جاده‌ها را نشان می‌دهد که می‌توان از آن‌ها گذشت و از نقطهٔ A به نقطهٔ B رفت. کوتاه‌ترین مسیر از A به B مسیری تعریف می‌شود که در آن فقط می‌توان به راست یا به پایین رفت.



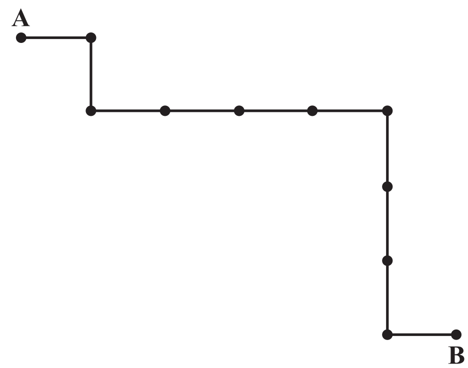
شکل ۱

مسئله: با توجه به تعریف فوق و شکل ۱ تعداد کوتاه‌ترین مسیرها از نقطهٔ A به نقطهٔ B را بیابید.

پاسخ: محل تقاطع هر خیابان افقی (خط افقی) و هر خیابان عمودی (خط عمودی) را یک چهارراه تلقی می‌کنیم و فاصلهٔ بین این دو چهارراه متوالی را یک «بلوک» می‌نامیم. در شکل ۱ هر سطر دارای ۶ بلوک و هر ستون دارای ۴ بلوک است. در صورتی که شخصی بخواهد از A به مقصد B حرکت کند، می‌تواند مسیرهای ترکیبی از چند حرکت به سمت راست (شرق) یا به سمت پایین (جنوب) را برگزینند. به دو نمونه از این مسیرها توجه کنید (شکل‌های ۲ و ۳):



شکل ۲



شکل ۳

شکل‌های ۲ و ۳ دو مسیر متفاوت از A به B را نشان می‌دهند. هر مسـیر از ۱۰ حرکت تشکیل می‌شود که ۴ تا از آن‌ها به پایین (D) و ۶تای آن‌ها به راست (R) است. در واقع مسیر شکل ۲ عبارت است از:

DRRRDRRDRD

و مسیر شکل ۳ عبارت است از:

RDRRRRDDDR

در نام‌گذاری‌های بالا هر R نمایشگر یک حرکت به سمت راست و هر D نمایشـگر یک حرکت به سمت پایین (جنوب) است. بنابراین مسـئله برمی‌گردد به اینکه به چند طریق می‌توان ۴ مکان (برای قرار دادن Dها) از ۱۰ مکان انتخاب کرد که همان ترکیب $\binom{10}{4}$ است.

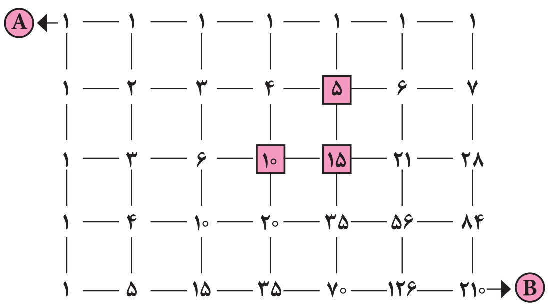
جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در شـکل ۱، ۵ خیابـان افقـی و ۷ خیابان عمودی رسـم شـده بود که تعـداد کوتاه‌ترین مسـیرها از A به B برابر شـد با: $\binom{5+7-2}{5-1}$. به‌طور کلی در یک مسـیر با m خط افقی و n خط عمودی، تعداد کوتاه‌ترین مسیرها از A به B عبارت‌اند از: $\binom{m+n-2}{n-1}$ یا $\binom{m+n-2}{m-1}$.

استفاده از عناصر مثلث خیام برای پاسخ به مسئله

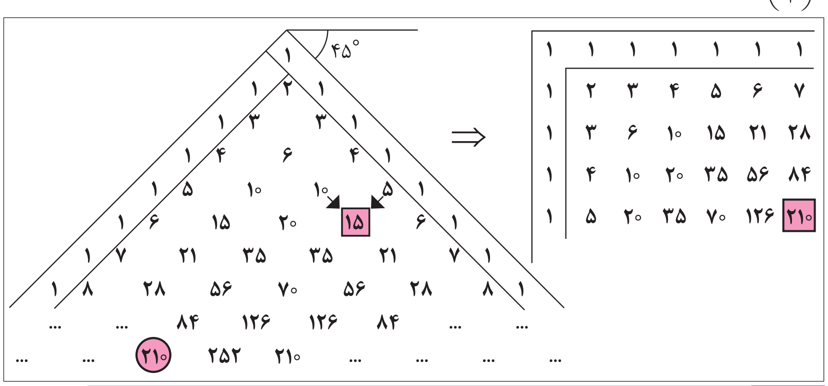
حال به پاسخ همین مسئله به روشی متفاوت می‌پردازیم. از نقطهٔ A شروع می‌کنیم. برای رفتن به نقطهٔ بعدی سمت راست A یا پایین A فقط یک راه داریم که نقاط آن را با عدد ۱ برچسب می‌زنیم. با این تفسیر ساده، برچسب تمام رأس‌های واقع در لبهٔ بالایی و لبه کناری (نقاط مرزی) عدد ۱ خواهد شد. و اما برچسب دیگر نقاط داخل مسیر (چهارراه‌ها) چگونه است؟ به یک چهارراه (نقطه) چگونه می‌توان وارد شد؟

دسترسی به هر نقطه داخل مسیر (شبکه) تنها از بالا یا از سمت چپ ممکن اسـت. به روشـنی می‌توان دید که مجموع تعداد راه‌های یگانهٔ دسترسـی به هر نقطه (چهارراه) عبارت اسـت از مجموع تعداد راه‌های مُنتهی به نقطهٔ بالایی بـه علاوهٔ مجموع تعداد راه‌های واصل به نقطهٔ سمت چپ نقطهٔ موردنظر. لذا برچسب هر نقطه داخل شبکه مجموعی است از برچسب دو نقطه واقعِ در بالا و سمت چپ آن. با این توضیح شـکل ۴ حاصل می‌شود. (مثلاً تقاطع ۱۵ از جمع عدد بالایی (۵) و سمت چپ (۱۰) به‌دست آمده است.)



شکل ۴

یعنی تعداد کوتاه‌ترین مسـیرها از A به B برابر ۲۱۰ می‌شود که همان $\binom{10}{4}$ اسـت که از روش قبلی به‌دسـت آوردیم. نگاه کنید! در کمال خوش‌وقتی برچسب‌ها همان اعداد مثلث خیام هستند که گویا با ۴۵ درجه دوران (مخالف حرکت عقربه‌های سـاعت) مربع خیام را ساخته‌اند! (به شکل ۵ توجه کنید!)

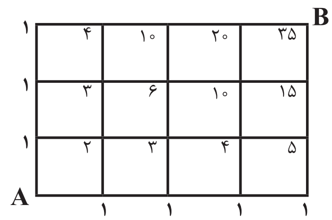


شکل ۵ تبدیل مثلث خیام به مربع خیام! (دوران ۴۵ درجه)

در ادامه به بررسی چند مثال دیگر خواهیم پرداخت:

مثال ۱. تعداد کوتاه‌ترین مسیرها از A به B در شکل ۶ را از دو روش مثلث خیام و اصول شمارش محاسبه می‌کنیم.

روش اول: عدد هر تقاطع از جمع دو عدد تقاطع‌های پایین و راست حاصل شده است. جمعاً ۳۵ مسیر متفاوت از A به B وجود دارد.



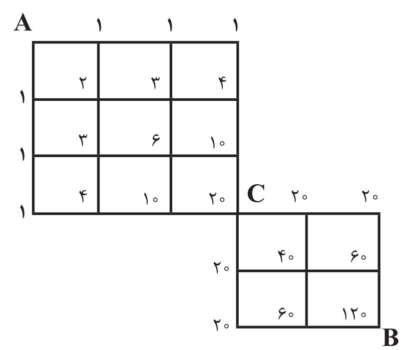
شکل ۶

روش دوم: برای رفتن از A به B باید ۴ بلوک به شرق (E) و ۳ بلوک به شـمال (N) طی کنیم. بنابراین تعداد مسیرهای ممکن از A به B متناظر است با یک تبدیل ۷ شی: EEEENNN

و بنابراین تعداد مسیرها برابر است با: $\frac{7!}{4!3!}$ که ۳۵ می‌شود.

مثال ۲. مجموع تعداد کوتاه‌ترین مسیرها را برای سفر از A به B با هر دو روش حساب کنید. (فقط حرکت به سمت E و S مجاز است.)

روش اول: بـه روش خیـام، عدد هر تقاطع از جمـع اعداد تقاطع بالا و چپ به‌دسـت می‌آید و ۱۲۰ مسـیر متفاوت از A به B وجود دارد.



شکل ۷

روش دوم: برای رفتن از A به C باید ۳ بلوک E و ۳ بلوک S را طی کنیم. لذا تعداد مسـیرهای رفتن از A به C متناظر است با تبدیل ۶ شـی: EEESSS و برابر است با: $\frac{6!}{3!3!} = 20$. برای رفتن از فقط C به B نیز باید ۲ بلوک در جهت E و ۲ بلوک در جهت S طی شود که برابر است با یک تبدیل ۴ شی: EESS و برابر است با: $\frac{4!}{2!2!} = 6$.

طبق اصل ضرب داریم:

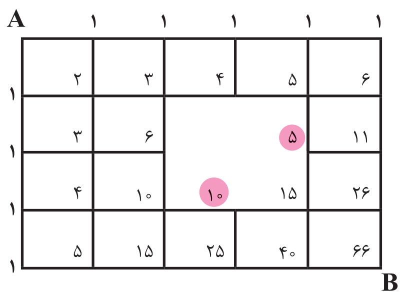
= (تعداد مسیرهای از A به C)×(تعداد مسیرهای از B به C)

تعداد مسیرهای از A به B

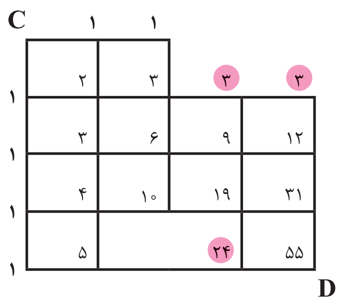
در نتیجه: ۱۲۰=۶×۲۰

وجود حفره در مسیر

هرگاه داخل مسـیر، حفره وجود داشته باشـد (وجود میدان در شـهر) آشکارا سـاده‌تر بودن روش مثلث خیام را می‌توان دید: (ارقام نوشته شـده در شکل به روشـنی گویای چگونگی محاسبات است.) بنابراین تعداد مسیر از A به B (شکل الف ـ ۸) برابر ۶۶ و تعداد مسیر از C به D (شکل ب ـ ۸) برابر ۵۵ است. آموزنده است به برچسب‌های نقاط مرزی میدان (حفره‌ها) توجه داشته باشید!



شکل ۸ ـ الف



شکل ۸ ـ ب